2009年3月
第25卷 第1期

纯粹数学与应用数学
Pure and Applied Mathematics

Mar. 2009
Vol.25 No.1

非线性反应扩散方程的广义条件对称及其精确解

李金花 [1,2], 惠小健 [3], 祁新雷 [1,2]

(1. 西北大学数学系, 陕西 西安 710069 ; 2. 西北大学非线性科学研究中心, 陕西 西安 710069

3. 西京学院数学教研室, 陕西 西安 710123)

摘要：利用广义条件对称, 考虑非线性反应扩散方程的精确解, 对应于不同的参数讨论，得到相应的方程及其允许的广义条件对称，进而得到方程的精确解.

关键词：非线性反应扩散方程; 广义条件对称; 精确解

中图分类号：O175.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1008-5513(2009)01-0087-06

1 引言

非线性反应扩散方程

$$u_t = (D(u)u_x^n)_x + G(u)u_x^m + H(u) \tag{1}$$

其中 $u = u(t, x)$ 是未知函数, $D(u)$, $G(u)$, $H(u)$ 是 u 的任意光滑函数, $D(u)$ 为扩散项，$H(u)$ 为热源项，包含了大量的非线性二阶方程，而这些方程在生物、种群、物理上有着广泛的应用, 例如：Fisher, Murray，Fitzhugh-Nagumo 和 Newell-Whiteched 方程等等 [1].

其中，非线性反应扩散方程最简单的形式多孔介质方程

$$u_t = \frac{k}{m}(uu_x)_x$$

主要描述了具有自由边界的非稳态土壤水流问题 [2]. 而 Burgers 类型方程也正是一类特殊的反应扩散方程. 对于这些特殊的方程，数学工作者们已经给出了很多非常有意义的结果，大量的计算方法和计算技巧也同样应用于其中.

文 [3] 中，利用 Lie 对称和 Form-preserving 变换研究了当 $n = 1$, $m = 1$ 时，方程

$$u_t = (D(u)u_x)_x + G(u)u_x + H(u) \tag{2}$$

的解. 对于反应扩散方程 $u_t = (A(u)u_x)_x + B(u)u_x$，人们也利用 Lie 和 Q- 条件对称进行了研究 [4]. 在文 [5] 中，给出了热传导方程的热转移问题：$u_t = au_{xx}^m + bu_x^n + ku^p$(其中 a, b, k 为任意常数) 的行波解. 屈长征教授最近几年在这方面更是做了大量的工作 [6-7].

本文将对方程 (1) 进行研究，非线性反应扩散方程一般具有较弱的 Lie 对称群，例如：Fisher 和 Fitzhugh-Nagumo 方程. 而广义条件对称作为求解这类偏微分方程精确解的有效方法，已经被人们广泛使用，它最早由 Fushchych 和 Zhdanov 提出，许多数学家又对其作了完善，例如 Fokas 和 Liu. 因此，文中考虑引入广义条件对称 (GCS)[7-8]，以希望得到一些新结果

收稿日期：2007-10-25.

基金项目：国家自然科学基金 (10671156).

作者简介：李金花 (1984-), 硕士, 研究方向: 偏微分方程及其理论.

2 广义条件对称

对于反应扩散方程 (1) $u_t=(D(u)u_x^n)_x+G(u)u_x^m+H(u)$, 考虑其形如

$$\sigma=u_{xx}-F(u)u_x^2-P(u)u_x^{m-n+1}-Q(u)u_x^{1-n} \tag{3}$$

的广义条件对称.

命题 2.1 方程 (1) 允许广义条件对称 (3) 当且仅当

$$\sigma' K=0 \tag{4}$$

其中 u 满足方程 (1), $\sigma=0$ 且 $D_x^i(\sigma)=0$, $i=1,2\cdots$, $K(u)=(D(u)u_x^n)_x+G(u)u_x^m+H(u)$, 其中"$\prime$"表示 Fréchet 导数 [7]. 由方程 (4) 可以得到相应的决定方程:

$$\begin{aligned}
&D'''+nDF''+FG''+3n(D'F)'+(2n+3n^2)D'F^2+(n^2+n^3)DF^3+\\
&(n+3n^2)DFF'=0, &(5)\\
&G''+(4n-m+2)PD''+nDP''+3nD'P'+(mn+3n+5n^2)PFD'+\\
&(3n^2+n)PDF'+(n^2+2mn-n)DFP'+(m-1)(GF)'+mG'F+\\
&(2n^3+2n^2-mn+nm^2)PDF^2+(m^2-m)F^2G=0, &(6)\\
&(n^2-n)DQQ'+(n+2n^2)Q^2D'+nQH'-HQ'+(n^2+n^3)Q^2DF=0, &(7)\\
&(n+2m)QG'+(mn+2n+4n^2)PD'Q+(n-m)PH'-HP'+(n^2-n)PDQ'+\\
&(2mn+n+n^2)DQP'+mGQ'-Q'G+(2nm^2+2mn+2n^3+2n^2)DPFQ+\\
&(2m+2m^2)FGQ=0, &(8)\\
&(2+4n)QD''+H''+nDQ''+3nD'Q'-(FH)'+(3n+5n^2)FD'Q+\\
&(n^2-n)DFQ'+(3n^2+n)QDF'+(n^2+n^3)2F^2DQ=0, &(9)\\
&mQ^2G+mnQ^2DP-m^2Q^2G-m^2nQ^2PD=0, &(10)\\
&(mn+2n^2+n)^2D'+(n+m)PG'+(m-1)GP'+(2mn-n+n^2)DPP'+\\
&2m(m-1)PGF+(2m^2n-2mn+n^3+n^2)P^2DF=0, &(11)\\
&m^2PGQ+nm^2P^2DQ-mPGQ-nmP^2DQ=0, &(12)\\
&m^2P^2G+m^2nP^3D-mP^2G-nmP^3D=0 &(13)
\end{aligned}$$

3 幂函数扩散形式

当 $D(u)=u^s$ 时, 由决定方程可得 $G(u)=u^s-nC_2u-nC_1$, $P(u)=C_2u^{1-s}+C_1u^{-s}-\frac{1}{n}$, $F(u)=-\frac{s}{nu}$, 以及 $Q(u)$、$H(u)$ 的决定方程:

$$\begin{aligned}
&(m-n)u^sQ'+(n^2C_1-nmC_1)Q'+(n^2C_2-nmC_2)uQ'+\frac{m-n}{n}H'+sC_1u^{-s-1}H+\\
&(ms-ns)u^{s-1}Q+(nC_2-mC_2)u^{1-s}H'+(nC_1-mC_1)u^{-s}H'+(sC_2-C_2)u^{-s}H+\\
&(nC_2-smnC_2-nsC_2+n^2sC_2)Q+snC_1(n-1-m)u^{-1}Q=0 &(14)\\
&nu^sQ''+H''+(s+2sn)u^{s-1}Q'+\frac{s}{n}u^{-1}H'-\frac{s}{n}u^{-2}H+\\
&(s^2-s+ns^2-ns)u^{s-2}Q=0 &(15)
\end{aligned}$$

$$nQH' - Q'H + (n^2 - n)u^s QQ' + n^2 sQ^2 u^{s-1} = 0 \tag{16}$$

假设 $Q(u)$ 和 $H(u)$ 具有如下形式：$Q(u) = a_1 u^\alpha$, $H(u) = a_2 u^\beta$, 由决定方程 (14)-(16) 可知, $\beta \neq \alpha + s$.

当 $\beta = \alpha + s$ 时，需要分下列三种情况考虑：(1) $s \neq 0$ 且 $s \neq 1$, (2) $s = 1$, (3) $s = 0$. 对应于上述三种情况，分别以表格的形式给出相应的结果.

表 1 当 $s \neq 0$ 且 $s \neq 1$ 时，相应的方程及其允许的 GCS

	方 程	GCS
$m = n$	$u_t = nu^s u_x^{n-1} u_{xx} + su^{s-1} u_x^{n+1} + u^s u_x^m + a_2 u^{\frac{-s}{n}}$	$\sigma = u_{xx} + \frac{s}{n} u^{-1} u_x^2 + \frac{1}{n} u_x^{m-n+1}$
	$u_t = nu^s u_x^{n-1} u_{xx} + su^{s-1} u_x^{n+1} + u^s u_x^m + a_2 u$	$\sigma = u_{xx} + \frac{s}{n} u^{-1} u_x^2 + \frac{1}{n} u_x^{m-n+1}$
	$u_t = nu^{1-n} u_x^{n-1} u_{xx} + (1-n) u^{-n} u_x^{n+1} + u^{1-n} u_x^m + a_2 u$	$\sigma = u_{xx} + \frac{1-n}{n} u^{-1} u_x^2 + \frac{1}{n} u_x^{m-n+1} - a_1 u^n u_x^{1-n}$
	$u_t = nu^{1-n} u_x^{n-1} u_{xx} + (1-n) u^{-n} u_x^{n+1} - nC_1 u_x^m - nC_2 u u_x^m + u^{1-n} u_x^m + a_2 u$	$\sigma = u_{xx} + \frac{1-n}{n} u^{-1} u_x^2 - (C_1 u^{n-1} + C_2 u^n - \frac{1}{n}) u_x^{m-n+1} - \frac{a_2}{n} u^n u_x^{1-n}$
$m \neq n$	$u_t = nu^s u_x^{n-1} u_{xx} + su^{s-1} u_x^{n+1} + u^s u_x^m + a_2 u^{\alpha+s}$	$\sigma = u_{xx} + \frac{s}{n} u^{-1} u_x^2 + \frac{1}{n} u_x^{m-n+1} + \frac{a_2}{n} u^\alpha u_x^{1-n}$
	$u_t = nu^s u_x^{n-1} u_{xx} + su^{s-1} u_x^{n+1} - nC_1 u_x^m - nC_2 u u_x^m + u^s u_x^m$	$\sigma = u_{xx} + \frac{s}{n} u^{-1} u_x^2 - (C_1 u^{-s} + C_2 u^{1-s} - \frac{1}{n}) u_x^{m-n+1}$

表 2 当 $s = 1$ 时，相应的方程及其允许的 GCS

	方 程	GCS
$m = n$	$u_t = nuu_x^{n-1} u_{xx} + u_x^{n+1} + (1 - mC_2) u u_x^m + a_2 u$	$\sigma = u_{xx} - (C_2 - \frac{1}{m}) u_x^{m-n+1} + \frac{1}{m} u^{-1} u_x^2$
	$u_t = nuu_x^{n-1} u_{xx} + u_x^{n+1} + (1 - nC_2) u u_x^m + a_2 u^{-\frac{1}{n}}$	$\sigma = u_{xx} + \frac{1}{n} u^{-1} u_x^2 - (C_2 - \frac{1}{n}) u_x^{m-n+1}$
$m \neq n$	$u_t = nuu_x^{n-1} u_{xx} + u_x^{n+1} + a_2 u$	$\sigma = u_{xx} + \frac{1}{n} u^{-1} u_x^2$
	$u_t = nuu_x^{n-1} u_{xx} + u_x^{n+1} + a_2 u^{-\frac{1}{n}}$	$\sigma = u_{xx} + \frac{1}{n} u^{-1} u_x^2$
	$u_t = nuu_x^{n-1} u_{xx} + u_x^{n+1} + (1 - nC_2) u u_x^m - a_1 n u$	$\sigma = u_{xx} - (C_2 - \frac{1}{n}) u_x^{m-n+1} + \frac{1}{n} u^{-1} u_x^2 - a_1 u_x^{1-n}$
	$u_t = nuu_x^{n-1} u_{xx} + u_x^{n+1} + (1 - nC_2) u u_x^m + a_2 u^{\alpha+1}$	$\sigma = u_{xx} + \frac{1}{n} u^{-1} u_x^2 + \frac{a_2}{n} u^\alpha u_x^{1-n} - (C_2 - \frac{1}{n}) u_x^{m-n+1}$
	$u_t = nuu_x^{n-1} u_{xx} + u_x^{n+1} - nC_1 u_x^m - nC_2 u u_x^m + u u_x^m$	$\sigma = u_{xx} - (\frac{C_1}{u} + C_2 - \frac{1}{n}) u_x^{m-n+1} + \frac{1}{n} u^{-1} u_x^2$
$m = n+1$	$u_t = nuu_x^{n-1} u_{xx} + u_x^{n+1} - nC_1 u_x^m + a_2 u$	$\sigma = u_{xx} + \frac{1}{n} u^{-1} u_x^2 - C_1 u_x^{m-n+1} u^{-1}$

表 3 当 $s=0$ 时，相应的方程及其允许的 GCS

	方 程	GCS
$m=n$	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}-mC_1u_x^m+u_x^m+a_2u$	$\sigma=u_{xx}-(C_1-\frac{1}{m})u_x^{m-n+1}$
$m\neq n$	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}-nC_1u_x^m+u_x^m+a_2$	$\sigma=u_{xx}-(C_1-\frac{1}{n})u_x^{m-n+1}-a_1u_x^{1-n}$
	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}-nC_2uu_x^m+(1-nC_1)u_x^m+a_1n$	$\sigma=u_{xx}-(C_2u+C_1-\frac{1}{n})u_x^{m-n+1}-a_1u_x^{1-n}$
	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}-nC_2uu_x^m+(1-nC_1)u_x^m$	$\sigma=u_{xx}-(C_2u+C_1-\frac{1}{n})u_x^{m-n+1}$
	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}+a_2u$	$\sigma=u_{xx}$
	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}+(1-nC_1)u_x^m+a_2u^{\alpha}$	$\sigma=u_{xx}-(C_1-\frac{1}{n})u_x^{m-n+1}+\frac{a_2}{n}u^{\alpha}u_x^{1-n}$
$m=n-1$	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}-nC_2uu_x^m+a_2u$	$\sigma=u_{xx}-C_2uu_x^{m-n+1}$
$n=1$	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}+a_2u$	$\sigma=u_{xx}-a_1uu_x^{1-n}$
	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}-C_2uu_x^m-(a_1-\frac{2a_1}{m})u$	$\sigma=u_{xx}-C_2uu_x^{m-n+1}-a_1uu_x^{1-n}$

由相应的方程及其允许的 GCS，进一步确定参数值，求得相应方程的精确解.

结果 1 方程 $u_t=u_{xx}+(1-C_1)u_x^2+a_2$, 允许 GCS: $\sigma=u_{xx}+(1-C_1)u_x^2-a_1$. 由 GCS 可得解形式为

$$u(x,t)=-\frac{1}{2(C1-1)}\ln\left(\frac{C_1-1}{a_1}(f_1(t)\sin((a_1(C_1-1))^{\frac{1}{2}}x)+f_2(t)\cos((a_1(C_1-1))^{\frac{1}{2}}x))^2\right)$$

进一步可得 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 满足下列常微分方程组

$$\begin{cases}f_1'(t)=-(a_1+a_2)(C_1-1)f_1(t)\\ f_2'(t)=-(a_1+a_2)(C_1-1)f_2(t)\end{cases}$$

令 $A=(a_1(C_1-1))^{\frac{1}{2}}$, 可得其精确解为

$$u(x,t)=-\frac{a_1}{2A^2}\ln((\frac{A}{a_1})^2(c_1\exp(-A^2-\frac{A^2a_2}{a_1})\sin(Ax)+c_2\exp(-A^2-\frac{A^2a_2}{a_1})\cos(Ax))^2)$$

其中 c_1，c_2 是任意常数.

结果 2 方程 $u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}+(1-nC_1)u_x^n+nC_1$, 允许 GCS: $\sigma=u_{xx}-(C_1-\frac{1}{n})u_x-a_1u_x^{1-n}$. 令 $C_1-\frac{1}{n}=A$, 可得其精确解为 $u(x,t)=\int\left(A^{\frac{1}{n}}\exp(A(x+f_1(t)))\right)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x+f_2(t)$, 其中 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 为 t 的任意函数.

结果 3 方程 $u_t=u^{-n}u_x^{n-1}u_{xx}-nu^{-n-1}u_x^{n+1}+u^{-n}u_x^n+a_2u$, 允许 GCS: $\sigma=u_{xx}-u^{-1}u_x^2+\frac{1}{n}u_x$, 其精确解为 $u(x,t)=c_1\exp(a_2t-c_2n\exp(\frac{x}{n}))$, 其中 c_1，c_2 为任意常数.

当 $n=1$, $G(u)=u^{-1}$, $H(u)=a_2u$ 时, 该方程为方程 (2) 的特殊形式.

结果 4 方程 $u_t=nuu_x^{n-1}u_{xx}+(1-nC_1)u_x^{n+1}+a_2u$, 允许 GCS: $\sigma=u_{xx}+\frac{1}{n}u^{-1}u_x^2-C_1u^{-1}u_x^2$. 求解后合并常数可得其精确解为 $u(x,t)=C(\exp(\frac{a_2(-1+C_1n-n)}{n}t)x)^{-\frac{n}{-1+C_1n-n}}$, 其中 C 为任意常数.

令 $\frac{a_2(-1+C_1n-n)}{n}=A$，可将解表示为 $u(x,t)=C(\exp(At)x)^{\frac{a_2}{A}}$.

4 指数函数扩散形式

假设 $D(u)=\mathrm{e}^{\alpha u}$，则由决定方程可得: $P(u)=C_2\mathrm{e}^{-\alpha u}+C_1\mathrm{e}^{-\alpha u}u-\frac{1}{n}$, $G(u)=-nC_1u+$

$e^{\alpha u}-nC_2$, $F(u)=-\frac{\alpha}{n}$，以及 $Q(u)$、$H(u)$ 的决定方程

$$nQH'-Q'H+(n^2-n)e^{\alpha u}QQ'+\alpha n^2Q^2e^{\alpha u}=0, \tag{17}$$

$$(nC_2-mC_2)e^{-\alpha u}H'+(nC_1-mC_1)ue^{-\alpha u}H'+(\frac{m}{n}-1)H'+(n^2C_2-nmC_2)Q'+ (n^2C_1-nmC_1)uQ'+(m-n)e^{\alpha u}Q'+(\alpha C_2-C_1)e^{-\alpha u}H+\alpha C_1ue^{-\alpha u}H+(n^2\alpha C_2- mn\alpha C_2-n\alpha C_2+nC_1)Q+(n^2\alpha C_1-mn\alpha C_1-n\alpha C_1)uQ+(m\alpha-n\alpha)e^{\alpha u}Q=0, \tag{18}$$

$$H''+ne^{\alpha u}Q''+\frac{\alpha}{n}H'+(2\alpha n+\alpha)e^{\alpha u}Q+(\alpha^2+n\alpha^2)e^{\alpha u}Q=0. \tag{19}$$

求解决定方程可得下列结果

表 4 当 $Q(u)=0$, $H(u)=C_4\mathrm{e}^{\frac{-\alpha u}{n}}+C_3$ 时, 相应的方程及其允许的 GCS

	方 程	GCS
$m=n$	$u_t=n\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n-1}u_{xx}+\alpha\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n+1}+\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^n+C_4\mathrm{e}^{-\frac{\alpha u}{n}}+C_3$	$\sigma=u_{xx}+\frac{\alpha}{n}u_x^2+\frac{1}{n}u_x$
$m\neq n$	$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}-nC_2u_x^m+u_x^m+C_3+C_4$	$\sigma=u_{xx}-(C_2-\frac{1}{n})u_x^{m-n+1}$
	$u_t=n\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n-1}u_{xx}+\alpha\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n+1}-C_2nu_x^m-C_1nuu_x^m+\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^m$	$\sigma=u_{xx}+\frac{\alpha}{n}u_x^2-(\mathrm{e}^{-\alpha u}C_2+u\mathrm{e}^{-\alpha u}C_1-\frac{1}{n})u_x^{m-n+1}$
	$u_t=n\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n-1}u_{xx}+\alpha\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n+1}+\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^m+C_3$	$\sigma=u_{xx}+\frac{\alpha}{n}u_x^2+\frac{1}{n}u_x^{m-n+1}$

表 5 $H(u)$ 满足 $H(u)=-n\mathrm{e}^{\alpha u}Q(u)$ 时，相应的方程及其允许的 GCS

方 程	GCS
$u_t=n\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n-1}u_{xx}+\alpha\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n+1}-C_2nu_x^m-C_1nuu_x^m+\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^m$	$\sigma=u_{xx}-(C_2\mathrm{e}^{-\alpha u}+C_1u\mathrm{e}^{-\alpha u}-\frac{1}{n})u_x^{m-n+1}+\frac{\alpha}{n}u_x^2$
$u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}+(1-C_2n)u_x^m-nQ(u)$	$\sigma=u_{xx}-(C_2-\frac{1}{n})u_x^{m-n+1}-Q(u)u_x^{1-n}$
$u_t=\mathrm{e}^{\alpha u}(\alpha u_x^{n+1}+nu_x^{n-1}u_{xx}+u_x^m-nQ(u))$	$\sigma=u_{xx}+\frac{\alpha}{n}u_x^2+\frac{1}{n}u_x^{m-n+1}-Q(u)u_x^{1-n}$

同样对于相应的参数取值，可以得到其相应方程的精确解.

结果 5 方程 $u_t=nu_x^{n-1}u_{xx}-nC_2u_x^{n+1}+u_x^{n+1}$, 允许 GCS: $\sigma=u_{xx}-(C_2-\frac{1}{n})u_x^2$. 其精确解为 $u(x,t)=-\frac{n}{C_2n-1}\ln(\exp(-n^{-1}(C_3+C_4)(C_2n-1)t)(c_1x+c_2))$, c_1 和 c_2 为任意常数.

结果 6 方程 $u_t=n\mathrm{e}^{(1-n)u}u_x^{n-1}u_{xx}+(2-n)\mathrm{e}^{(1-n)u}u_x^{n+1}+C_3$, 允许 GCS: $\sigma=u_{xx}+\frac{2-n}{n}u_x^2$. 其精确解形式为 $u(x,t)=\frac{n}{2-n}\ln(f_1(t)x+f_2(t))$, 进一步确定 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，应满足下列常微方程组:

$$\begin{cases} f_1'=\frac{2-n}{n}(C_3f_1+n^{n+1}(2-n)^{-n}f_1^{n+2}) \\ (f_1f_2)'=\frac{2-n}{n}(2C_3f_1f_2+2n^{n+1}(n-2)^{-n}f_1^{n+2}f_2) \\ f_2'=\frac{2-n}{n}(C_3f_2-(n-2)^{-n}n^{n+1}f_1^{n+1}f_2^{-1}+n^{n+1}(n-2)^{-n}f_1^{n+1}f_2) \end{cases}$$

结果 7 方程 $u_t = n\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n-1}u_{xx} + \alpha\mathrm{e}^{\alpha u}u_x^{n+1} + \mathrm{e}^{\alpha u}u_x^n$, 允许 GCS: $\sigma = u_{xx} + \frac{\alpha}{n}u_x^2 + \frac{1}{n}u_x$. 其精确解为 $u(x,t) = \frac{n}{\alpha}\ln\left(c_1\exp(-c_1\frac{x}{n}) - c_2\right)$, 与 t 无关.

5 结论

本文利用广义条件对称研究非线性反应扩散方程，并相应得到了一些精确解. 对于非线性反应扩散方程，同样可以考虑其数值解，例如：在文 [9] 中，给出了 Murray 方程 $u_t = u_{xx} + \lambda_1 u u_{xx} + \lambda_2 u + \lambda_3 u^2$ 的数值解.

参 考 文 献

[1] Murray J D. Nonlinear Differential Equation Models in Biology[M]. Clarendon:Oxford,1977.

[2] Zhdanov R Z, Lahno V I. Conditional symmetry of a porous medium equation[J]. Physica D,1998,122:178-186.

[3] Roman Cherniha, Mykola Serov, Inna Rassokha. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equation[J]. J.Math.Anal.Appl.,2008,342:1363-1379.

[4] Roman Cherniha, Mykola Serov. Nonlinear systems of the Burgers-type equations：Lie and Q-conditional symmetries, Ansätze and solutions[J]. J.Math.Anal.Appl.,2003,282:305-328.

[5] Arturo de Pablo, Ariel Sánchez. Global Travelling Waves in Reaction-Convection-Diffusion Equations[J]. Journal of Differential Equations,2000,165:377-413.

[6] Qu Changzheng, Estevez P G. On nonlinear diffusion equations with x-dependent convection and absorption[J]. Nonlinear Analysis,2004,57:549-577.

[7] Qu Changzheng, Ji Lina, Dou Jihong. Exact solutions and generalized conditional symmetries to $(n+1)$-dimensional nonlinear diffusion equations with source term[J]. Physics Letters A,2005,343:139-147.

[8] 郑群珍，姬丽娜. 四阶非线性发展方程的精确解和广义条件对称 [J]. 纯粹数学与应用数学,2007,23402-406.

[9] Genevieve Barro, Ousseni So, Jean Marie Ntaganda, et al. A numerical method for some nonlinear differential equation models in biology[J]. Applied Mathematics and Computation,2008,200:28-33.

Generalized conditional symmetry of convection-diffusion-reaction equation and exact solutions

LI Jin-hua[1,2], XI Xiao-jian[3], QI Xin-lei[1,2]

(1. Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China

2. Center for Nonlinear Studies, Northwest University, Xi'an 710127, China

3. Teaching and Research Section of Mathematics, Xijing University, Xi'an 710123, China)

Abstract: The exact solutions of reaction-diffusion-convection equations(RDC) are discussed, using second order generalized conditional symmetry. Through the generalized conditional symmetry, corresponding to the discussion of the parameters, equations and the generalized conditional symmetry are given. Then, the exact solutions are given.

Keywords: nonlinear reaction-diffusion equation, generalized conditional symmetry, exact solution

2000MSC: 35A25